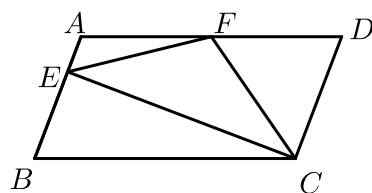


第2讲 中点辅助线综合（练习）

一、倍长中线

1. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， $AD = 2AB$ ， F 是 AD 的中点，作 $CE \perp AB$ ，垂足 E 在线段 AB 上，连接 EF 、 CF ，则下列结论：(1) $\angle DCF = \frac{1}{2}\angle BCD$ ，(2) $EF = CF$ ；(3) $S_{\triangle BEC} = 2S_{\triangle CEF}$ ；(4) $\angle DFE = 3\angle AEF$ ，其中正确结论的个数是（ ）。



A. 1个

B. 2个

C. 3个

D. 4个

【答案】C

【解析】(1) $\because F$ 是 AD 的中点，

$$\therefore AF = FD,$$

$\because$ 在平行四边形 $ABCD$ 中， $AD = 2AB$ ，

$$\therefore AF = FD = CD,$$

$$\therefore \angle DFC = \angle DCF,$$

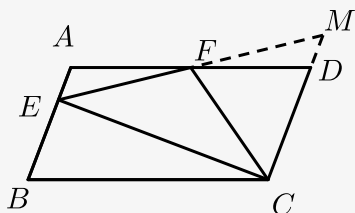
$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle DFC = \angle FCB,$$

$$\therefore \angle DCF = \angle BCF,$$

$$\therefore \angle DCF = \frac{1}{2}\angle BCD, \text{ 故正确；}$$

(2) 延长 EF ，交 CD 延长线于 M ，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore AB \parallel CD,$$

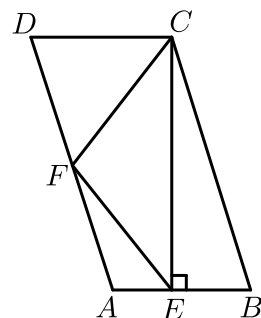
$$\therefore \angle A = \angle MDF,$$

$\because F$ 为 AD 中点 ,
 $\therefore AF = FD$,
 在 $\triangle AEF$ 和 $\triangle DFM$ 中 ,

$$\begin{cases} \angle A = \angle FDM \\ AF = DF \\ \angle AFE = \angle DFM \end{cases} ,$$
 $\therefore \triangle AEF \cong \triangle DMF(ASA)$,
 $\therefore FE = MF$, $\angle AEF = \angle M$,
 $\because CE \perp AB$,
 $\therefore \angle AEC = 90^\circ$,
 $\therefore \angle AEC = \angle ECD = 90^\circ$,
 $\therefore FM = EF$,
 $\therefore EF = CF$, 故正确 ;
 (3) $\because EF = FM$,
 $\therefore S_{\triangle EFC} = S_{\triangle CFM}$,
 $\therefore MC > BE$,
 $\therefore S_{\triangle BEC} < 2S_{\triangle EFC}$
 故 $S_{\triangle BEC} = 2S_{\triangle CEF}$ 错误 ;
 (4) 设 $\angle FEC = x$, 则 $\angle FCE = x$,
 $\therefore \angle DCF = \angle DFC = 90^\circ - x$,
 $\therefore \angle EFC = 180^\circ - 2x$,
 $\therefore \angle EFD = 90^\circ - x + 180^\circ - 2x = 270^\circ - 3x$,
 $\therefore \angle AEF = 90^\circ - x$,
 $\therefore \angle DFE = 3\angle AEF$, 故正确 ,
 故选 : C .

【标注】【知识点】平行四边形性质综合应用

2. 如图 , 在四边形 $ABCD$ 中 , $AD \parallel BC$, $AD = BC = 2AB$, F 是 AD 的中点 , 作 $CE \perp AB$, 垂足 E 在线段 AB 上 , 连接 EF 、 CF .



(1) 若 $\angle ADC = 80^\circ$, 求 $\angle ECF$.

(2) 求证 : $\angle ECF = \angle CEF$.

【答案】 (1) 40° .

(2) 证明见解析 .

【解析】 (1) $\because AD = BC = 2AB$, $AD \parallel BC$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形 ,

$\therefore AB = CD$, $\angle ADC + \angle DCB = 180^\circ$,

$\angle ADC = \angle ABC$,

又 $\because F$ 为 CD 中点 , $AD = BC = 2AB$,

$\therefore FD = FA = DC$,

又 $\because \angle ADC = 80^\circ$,

$\therefore \angle DFC = \angle DCF = 50^\circ$, $\angle DCB = 100^\circ$,

又 $\because CE \perp AB$,

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle BEC$ 中 , $\angle ABC = 80^\circ$,

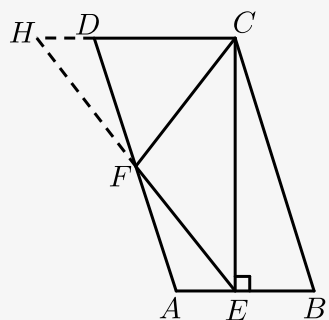
$\therefore \angle BCE = 10^\circ$,

$\therefore \angle ECF = \angle DCB - \angle DCF - \angle BCE$

$= 100^\circ - 50^\circ - 10^\circ$

$= 40^\circ$.

(2) 延长 EF , CD 交于点 H ,



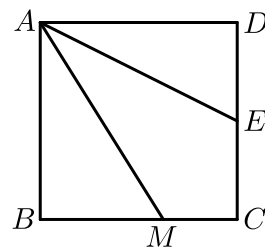
$\because F$ 为 AD 中点 ,

$\therefore FD = FA$,
 又 $\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形 ,
 $\therefore AB \parallel CD$, $\angle DAB = \angle ADH$, $\angle H = \angle FEA$,
 $\therefore$ 在 $\triangle HDF$ 与 $\triangle EAF$ 中 ,

$$\begin{cases} \angle ADH = \angle DAB \\ \angle H = \angle FEA \\ DF = AF \end{cases}$$
 ,
 $\therefore \triangle HDF \cong \triangle EAF (AAS)$,
 $\therefore HF = EF$,
 又 $\because CE \perp AB$, $AB \parallel CD$,
 $\therefore \angle HCE = 90^\circ$,
 $\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle CHE$ 中 , F 为 HE 中点 ,
 $\therefore HF = CF = EF$,
 $\therefore \angle ECF = \angle CEF$.

【标注】【知识点】中点类辅助线

3. 如图 , 四边形 $ABCD$ 是正方形 , M 是 BC 边上的一点 , E 是 CD 边的中点 , AE 平分 $\angle DAM$.



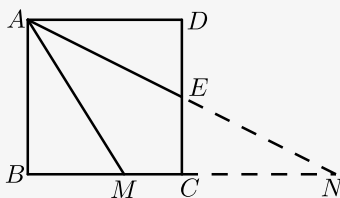
- (1) 求证 : $AM = AD + MC$.
 (2) 若 $AD = 4$, 求 AM 的长 .

【答案】 (1) 证明见解析 .

(2) $AM = 5$.

【解析】 (1) 延长 AE 、 BC 交于点 N , 如图所示 :

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形 ,
 $\therefore AD \parallel BC$,
 $\therefore \angle DAE = \angle ENC$,
 ,
 $\therefore AE$ 平分 $\angle DAM$,



$$\therefore \angle DAE = \angle MAE,$$

$$\therefore \angle ENC = \angle MAE,$$

$$\therefore AM = MN,$$

$$\text{在} \triangle ADE \text{和} \triangle NCE \text{中}, \begin{cases} \angle DAE = \angle MAE \\ \angle AED = \angle NEC, \\ DE = CE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle NCE (\text{AAS}),$$

$$\therefore AD = NC,$$

$$\therefore AM = MN = MC + MC = AD + MC.$$

(2) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore AB = BC = AD = 4, \angle B = 90^\circ,$$

$$\text{设 } MC = x, \text{ 则 } BM = 4 - x,$$

$$AM = \sqrt{AB^2 + BM^2} = \sqrt{4^2 + (4 - x)^2},$$

$$\therefore AM = AD + MC = 4 + x,$$

$$\therefore \sqrt{4^2 + (4 - x)^2} = 4 + x,$$

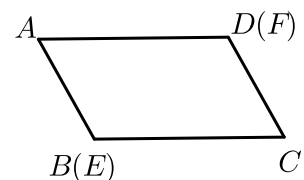
$$\text{解得: } x = 1,$$

$$\therefore AM = 5.$$

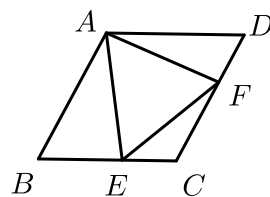
【标注】【知识点】倍长(类)中线

4. 点 E 、 F 分别是平行四边形 $ABCD$ 的边 BC 、 CD 上的点, $\angle EAF = 60^\circ$, $AF = 4$.

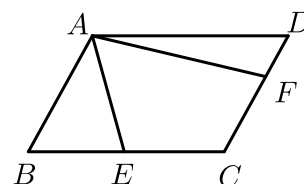
(1) 若 $AB = 2$, 点 E 与点 B 、点 F 与点 D 分别重合, 求平行四边形 $ABCD$ 的面积.



(2) 若 $AB = BC$, $\angle B = \angle EAF = 60^\circ$, 求证: $\triangle AEF$ 为等边三角形.



(3) 若 $BE = CE$, $CF = 2DF$, $AB = 3$, 直接写出 AE 的长度(无需解答过程).



【答案】(1) $4\sqrt{3}$.

(2) 证明见解析.

(3) $\frac{2+\sqrt{13}}{2}$.

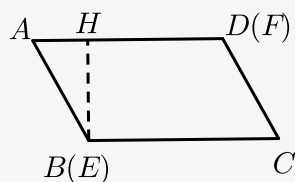
【解析】(1) 作 $BH \perp AD$ 于 H , 在 $\text{Rt}\triangle ABH$ 中, $\angle BAD = 60^\circ$,

$$\therefore \angle ABH = 30^\circ$$

$$\therefore AB = 2,$$

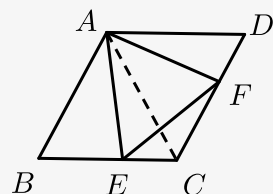
$$\therefore AH = 1, BH = \sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\text{平行四边形}ABCD} = AD \cdot BH = 4\sqrt{3}.$$



(2) 连接 AC , 可证 $\triangle ABE \cong \triangle ACF$

可得 $\triangle AEF$ 为等边三角形.



(3) 延长 AE 交 DC 延长线于 P , 过 F 作 $FG \perp AP$

易证 $\triangle ABE \cong \triangle PCE$,

$$PC = AB = CD = 3, CF = 2DF,$$

得 $CF = 2$,

$$\therefore PF = 5$$

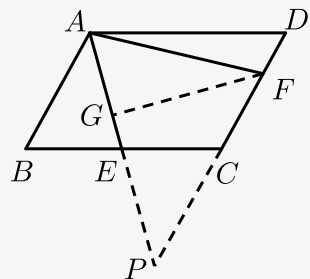
在 $\text{Rt}\triangle AFG$ 中, $AF = 4$, $\angle EAF = 60^\circ$

可求 $AG = 2$, $FG = 2\sqrt{3}$,

在 $\text{Rt}\triangle PFG$ 中, $PF = 5$, $FG = 2\sqrt{3}$,

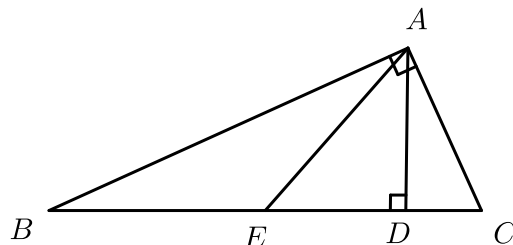
可求 $PG = \sqrt{13}$,

$$\therefore AP = 2 + \sqrt{13}, AE = \frac{2 + \sqrt{13}}{2}.$$



二、直角三角形斜边中线

5. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AD \perp BC$ ，垂足为 D ， E 是边 BC 的中点， $AD = ED = 3$ ，则 BC 的长为（ ）。



- A. $3\sqrt{2}$ B. $3\sqrt{3}$ C. 6 D. $6\sqrt{2}$

【答案】D

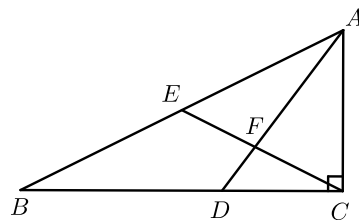
【解析】 $\because AD = ED = 3$ ， $AD \perp BC$ ，
 $\therefore \triangle ADE$ 为等腰直角三角形，
 根据勾股定理得： $AE = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$ ，
 $\because \text{Rt}\triangle ABC$ 中， E 是边 BC 的中点，
 $\therefore AE = \frac{1}{2}BC$ ，
 则 $BC = 2AE = 6\sqrt{2}$ 。

【标注】【知识点】直角三角形斜边中线性质的应用

【知识点】等腰直角三角形的性质

【知识点】等腰直角三角形的判定

6. 如图， $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， D 在 CB 上， E 是 AB 的中点， AD 与 CE 交于 F ，且 $AD = DB$ ，若 $\angle B = 20^\circ$ ，则 $\angle DFE$ 的度数为（ ）。



- A. 40° B. 50° C. 60° D. 70°

【答案】C

【解析】 $\because \angle ACB = 90^\circ$ ，点E是AB的中点，

$$\therefore AE = BE = EC,$$

$$\therefore \angle ECB = \angle B = 20^\circ.$$

$$\because AD = BD,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle B = 20^\circ,$$

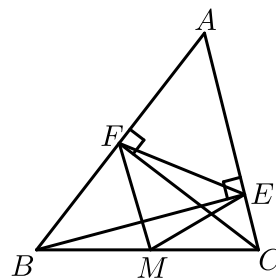
$$\therefore \angle ADC = \angle B + \angle BAD = 40^\circ,$$

$$\therefore \angle DFE = \angle ADC + \angle ECB = 60^\circ.$$

故选C.

【标注】【知识点】直角三角形斜边中线性质的应用

7. 如图，BE、CF分别是 $\triangle ABC$ 的高，M为BC的中点， $EF = 4$ ， $BC = 10$ ，则 $\triangle EFM$ 的周长是_____.



【答案】14

【解析】 $\because BE$ 、 CF 分别是 $\triangle ABC$ 的高，M为BC的中点， $BC = 10$.

$$\therefore \text{在Rt}\triangle BCE\text{中}, EM = \frac{1}{2}BC = 5,$$

$$\text{在Rt}\triangle BCF\text{中}, FM = \frac{1}{2}BC = 5,$$

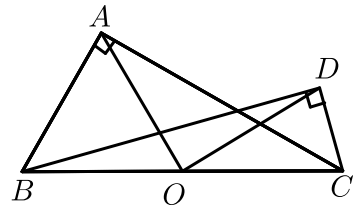
$$\text{又}\because EF = 4,$$

$$\therefore \triangle EFM\text{的周长} = EM + FM + EF = 5 + 5 + 4 = 14.$$

故答案为：14.

【标注】【知识点】直角三角形斜边中线性质的应用

8. 如图，在 $\text{Rt}\triangle BAC$ 和 $\text{Rt}\triangle BDC$ 中， $\angle BAC = \angle BDC = 90^\circ$ ，O是BC的中点，连接AO、DO. 若 $AO = 3$ ，则DO的长为_____.



【答案】 3

【解析】 在Rt△BAC和Rt△BDC中， $\angle BAC = \angle BDC = 90^\circ$ ，O是BC的中点，

$$\therefore AO = \frac{1}{2}BC, DO = \frac{1}{2}BC,$$

$$\therefore DO = AO,$$

$$\therefore AO = 3,$$

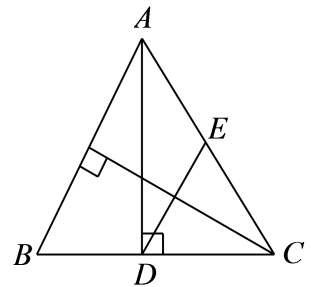
$$\therefore DO = 3.$$

【标注】【能力】推理论证能力

【知识点】 直角三角形斜边中线性质的应用

【思想】 转化与化归思想

9. 如图，已知在△ABC中， $AC = BC$ ， $AD \perp BC$ ，垂足为点D，点E是AC边的中点，若 $DE = 5$ ， $AD = 8$ ，则AB的长度是（ ）。



A. $2\sqrt{5}$

B. $3\sqrt{5}$

C. $4\sqrt{5}$

D. 4

【答案】 C

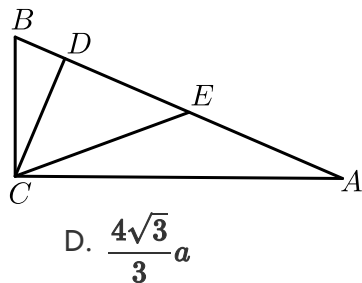
【解析】 DE为△ADC斜边上的中线，则 $DE = \frac{1}{2}AC$ ， $AC = 10$ ， $AD = 8$ ，

$$\text{则 } DC = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6, BD = BC - DC = 10 - 6 = 4,$$

$$AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5}.$$

【标注】【知识点】直角三角形斜边中线性质的应用

10. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $CD \perp AB$ ，垂足为 D ，点 E 是 AB 的中点， $CD = DE = a$ ，则 AB 的长为（ ）。



A. $2a$

B. $2\sqrt{2}a$

C. $3a$

D. $\frac{4\sqrt{3}}{3}a$

【答案】 B

【解析】 $\because CD \perp AB$ ， $CD = DE = a$ ，

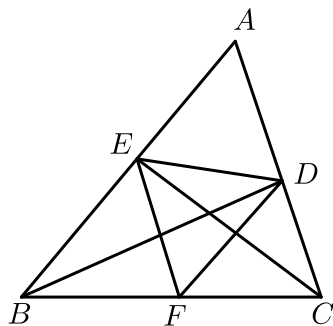
$$\therefore CE = \sqrt{2}a,$$

$\because$ 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ，点 E 是 AB 的中点，

$$\therefore AB = 2CE = 2\sqrt{2}a.$$

【标注】【知识点】直角三角形斜边中线性质的应用

11. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 60^\circ$ ， BD ， CE 为高， F 是 BC 的中点，连接 DE ， DF ， EF 。则以下结论：
① $EF = DF$ ；② $\triangle DEF$ 是等边三角形；③ $BE + CD = BC$ ；④当 $\angle ABC = 45^\circ$ 时，
 $BE = \sqrt{2}DE$ ；其中一定正确的有 _____。（填序号）



【答案】 ①②④

【解析】 $\because BD \perp AC$ ， $CE \perp AB$ ， F 为 BC 的中点，

$$\therefore EF = \frac{1}{2}BC, DF = \frac{1}{2}BC,$$

$$\therefore EF = DF, \text{①正确；}$$

$$\text{又} \because \angle A = 60^\circ, \angle CEA = \angle BDA = 90^\circ,$$

设 CE 与 BD 交点为 O ，

$$\text{则} \angle DOE = 120^\circ,$$

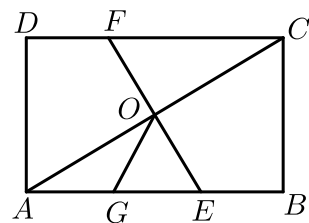
$\therefore \angle ODE + \angle OED = 60^\circ$, $\angle OBC + \angle OCB = 60^\circ$,
 又 $\because BF = DF = CF = EF$,
 $\therefore \angle FDB = \angle OBC$, $\angle FEC = \angle OCB$,
 $\therefore \angle FDB + \angle FEC = 60^\circ$,
 $\angle EDF + \angle FED = \angle ODE + \angle OED + \angle FDB + \angle FEC = 120^\circ$,
 $\therefore \angle EFD = 60^\circ$,
 又 $\because EF = DF$,
 $\therefore \triangle DEF$ 是等边三角形, ② 正确;
 当 $\angle ABC = 45^\circ$ 时, 又 $\angle BEC = 90^\circ$,
 $\therefore BE = CE$, $BC = \sqrt{2}BE$,
 又 $DE = EF = \frac{1}{2}BC$,
 $\therefore BE = \sqrt{2}DE$, ④ 正确.
 故答案为: ①②④.

【标注】【能力】运算能力

【能力】抽象概括能力

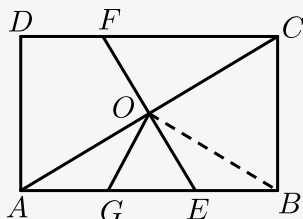
【知识点】直角三角形斜边中线性质的应用

12. 如图, 过矩形 $ABCD$ 对角线 AC 的中点 O 作 $EF \perp AC$, 分别交 AB 、 DC 于点 E 、 F , 点 G 为 AE 的中点, 若 $\angle AOG = 30^\circ$, $DC = 10$, 则 OG 的长为 _____.



【答案】 $\frac{10}{3}$

【解析】连接 OB ,

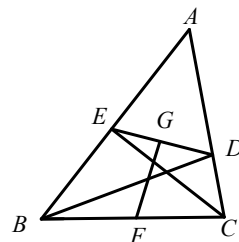


$\because EF \perp AC$,
 $\therefore \triangle AOE$ 是直角三角形.

$$\begin{aligned}
&\therefore OG = AG = GE, \\
&\therefore \angle BAC = \angle AOG = 30^\circ, \angle AEO = 60^\circ, \angle GOE = \angle AOE - \angle AOG = 60^\circ, \\
&\therefore \triangle OEG \text{ 是正三角形}, \\
&\therefore OG = OE = GE, \\
&\therefore \angle ABO = \angle BAC = 30^\circ, \\
&\therefore \angle AOB = 180^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 120^\circ, \\
&\therefore \angle BOE = \angle AOB - 90^\circ = 30^\circ, \\
&\therefore \triangle OEB \text{ 是等腰三角形}, \\
&\therefore OE = EB, \\
&\therefore OG = AG = GE = EB = OE, \\
&\therefore OG = \frac{1}{3}AB = \frac{1}{3}DC = \frac{10}{3}.
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】解直角三角形的综合应用

13. 如图, $\triangle ABC$ 中, $BC = 10$, 若 $BD \perp AC$ 于 D , $CE \perp AB$ 于 E , F 、 G 分别为 BC 、 DE 的中点, 若 $ED = 6$, 则 FG 的长为 _____.



【答案】4

【解析】连接 EF 、 DF ,

$\because CE \perp AB$, 在

$\text{Rt}\triangle BEC$ 中, F 为 BC 中

点,

$$\therefore EF = \frac{1}{2}BC = 5,$$

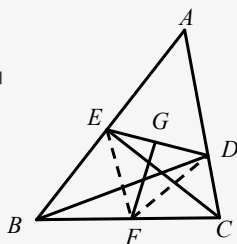
$\because BD \perp AC$, 在

$\text{Rt}\triangle BDC$ 中, F 为 BC 中点,

$$\therefore DF = \frac{1}{2}BC = 5,$$

$$\therefore EF = DF = 5,$$

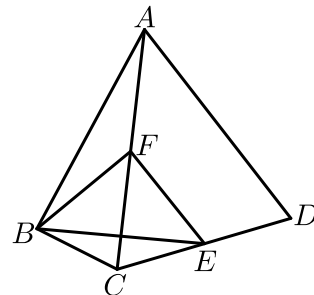
$\because G$ 为 ED 中点,



$\therefore EG = 3$ 且 $FG \perp ED$,
 $\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle EFG$ 中 , $EF = 5$, $EG = 3$,
 $\therefore FG = 4$.

【标注】【知识点】中位线定理及其应用

14. 如图 , 四边形 $ABCD$ 中 , $\angle ABC = 90^\circ$, $\angle CAD = 2\angle CAB = 45^\circ$, E 、 F 分别是 CD 、 CA 的中点 , $AC = AD = 8$, 求 BE 的长 .



【答案】 $BE = 4\sqrt{2}$.

【解析】 $\because E$ 、 F 分别是 CD 、 CA 的中点 ,
 $\therefore EF \parallel AD$ 且 $EF = \frac{1}{2}AD$,
 $\therefore \angle CFE = \angle CAD = 45^\circ$, $EF = 4$,
 $\because \angle ABC = 90^\circ$, F 是 CA 的中点 ,
 $\therefore BF = \frac{1}{2}AC = AF = 4$,
 $\therefore \angle BAF = \angle ABF$,
 $\therefore \angle BFC = 2\angle BAC = 45^\circ$
 $\therefore \angle BFE = 90^\circ$
 $\therefore BE = 4\sqrt{2}$.

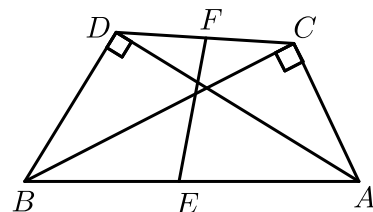
【标注】【知识点】直角三角形斜边中线性质的应用

【知识点】中位线定理及其应用

【能力】运算能力

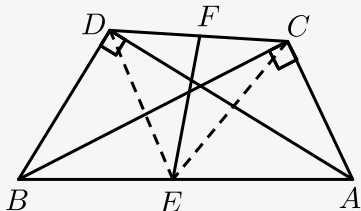
【能力】推理论证能力

15. 已知 : 如图 , $\angle ACB = \angle ADB = 90^\circ$, 点 E 、 F 分别是线段 AB 、 CD 的中点 , 求证 : $EF \perp CD$



【答案】证明见解析 .

【解析】连接线段 ED 、 EC ,



$\because \angle ADB = \angle ACB = 90^\circ$,

E 为 AB 的中点 ,

$\therefore DE = \frac{1}{2}AB$,

$CE = \frac{1}{2}AB$,

$\therefore DE = CE$,

$\therefore \triangle EDC$ 为等腰三角形 ,

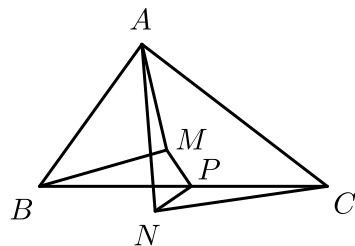
$\therefore F$ 为 CD 的中点 ,

$\therefore EF \perp CD$.

【标注】【知识点】直角三角形斜边中线性质的应用

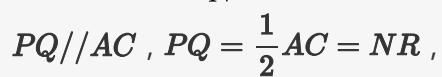
【能力】推理论证能力

16. 已知：在 $\triangle ABC$ 中，分别以 AB 、 AC 为斜边作等腰直角三角形 ABM ，和 CAN ， P 是边 BC 的中点。求证： $PM = PN$.



【答案】证明见解析 .

【解析】取 AB 中点 Q ， AC 中点 R ，连结 PQ ， PR ， MQ ， NR ，



$$\angle PQM = \angle PRN \text{ (两边分别垂直)}, \angle BQP = \angle BAC = \angle PRC,$$

$$\text{则 } FM = \frac{1}{2}AB = DN, DM = \frac{1}{2}AC = NE.$$

$$\therefore \angle BMD = \angle BAC = \angle DNC,$$

又 $\angle FMB = 90^\circ = \angle ENC$,

$\therefore \angle FMD = \angle DNE$,

$\therefore \triangle FMD \cong \triangle DNE(\text{SAS})$,

$\therefore FD = DE$.

设 $\angle FDM = x$, $\angle MDN = y$, $\angle NDE = z$,

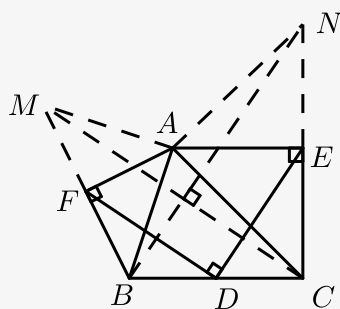
$\therefore \angle MFD = \angle NDE = z$, $\angle BMD = \angle MDN = y$,

在 $\triangle FMD$ 中, $x + y + z + 90^\circ = 180^\circ$,

$\therefore x + y + z = 90^\circ$. $FD \perp DE$.

方法二: 延长 BF 到 M , 使 $FM = FB$, 连 AM .

延长 CE 到 N , 使 $EN = EC$, 连 AN .



则 $\triangle MAB$ 、 $\triangle CAN$ 均为等腰直角三角形.

$\therefore \triangle MAC \cong \triangle BAN(\text{SAS})$,

$\therefore CM = BN$, $\angle AMC = \angle ABN$,

$\therefore CM \perp BN$.

又 $FD = \frac{1}{2}CM$, $FD \parallel CM$,

$ED = \frac{1}{2}BN$, $ED \parallel BN$.

$\therefore FD = DE$, $FD \perp DE$.

【标注】【知识点】直角三角形斜边中线性质的应用；中位线定理及其应用